PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures. (P)

PREMIÈRE PARTIE.

I

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction Arctan , ainsi que son rayon de convergence. En déduire la valeur de la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^k \frac{1}{2k+1}$.

2. Montrer que le développement en série entière de la question précédente converge uniformément sur $[0,1]$. Quelle est la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$?

3. Calculer la primitive de la fonction Arctan qui s'annule en $x=0$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}$.

4. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et son rayon de convergence. Exprimer, pour $|x|<1$, à l'aide des fonctions usuelles, les sommes des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$.

II

On considère l'équation différentielle :

$$2x(x+1)y'' + (5x+3)y' + y = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer une fonction développable en série entière au point $x_0 = 0$, qui soit solution de (E) (on précisera le rayon de convergence de la série). En déduire un espace vectoriel de dimension 1 constitué de solutions définies sur l'intervalle $]-1,+\infty[$; on donnera des expressions simples de ces solutions sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, à l'aide de fonctions usuelles.

2. Achever la résolution de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

III

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{2n+1}}{4n+3}$.

1. Déterminer son domaine de convergence.

2. Donner une expression simple de sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur l'intervalle $]0,1[$. Quelle est la limite de $S(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

3. Calculer $S(1)$ (on utilisera le résultat de I.2.). En déduire que la série ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ ni sur $[0,1[$.

Deuxième partie.

On désigne par R un réel > 0, et on lui associe dans $\mathbb{R}^2$ les domaines
$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ et $D'_R = D_R \setminus (0,0)$.
On identifie, pour simplifier les notations, $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des nombres complexes, par l'isomorphisme canonique.

I

Soit f une fonction de classe C^1 sur D_R, à valeurs complexes, et vérifiant sur D'_R la relation (où i désigne le complexe de carré -1) :

$$(\mathcal{H}) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On lui associe la fonction g définie sur $[0,R[\times\mathbb{R}$ par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On notera que g est, relativement à la variable θ, $2\pi-$périodique.

1. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des variables r,θ et des dérivées partielles de f.

2. Déterminer, pour $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D'_R$, les formules inverses, donnant les dérivées partielles de f en fonction de celles de g, de r et de θ. Montrer que la relation $(\mathcal{H})$ équivaut à la suivante :

$$(\mathcal{H}_1) \quad r\frac{\partial g}{\partial r} + i\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0.$$

3. Pour $r \in [0,R[$, et $n \in \mathbb{Z}$ on définit la fonction c_n par la formule :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta)e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Montrer que c_n est continue sur $[0,R[$, dérivable sur $]0,R[$ et qu'elle vérifie sur cet intervalle la relation : $rc'_n(r) = nc_n(r)$. Prouver que c_n est nulle pour $n < 0$, et que c_0 est une constante égale à $f(0,0)$.

4. En utilisant un théorème sur les séries de Fourier, que l'on énoncera avec précision, prouver que f admet sur D_R un développement en série entière de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où z désigne le complexe $z = x + iy$ et les c_n sont des constantes complexes.

II

On conserve les notations précédentes, en fixant ici $R = \frac{\pi}{2}$.

1. Soit $P(x,y) = \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$. Déterminer une fonction Q, à valeurs réelles, de classe C^1 sur D_R, telle que la fonction $f = P + iQ$ vérifie $(\mathcal{H})$, et que l'on ait $f(0,0) = 0$. Vérifier l'égalité : $f(x,0) = \tan x$. Que vaut $f(0,y)$?

2. Prouver, en utilisant les résultats de la section I, que les fonctions tan et th sont développables en séries entières de rayons égaux à $\frac{\pi}{2}$. Si $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ est le premier développement, comment s'écrit celui de th ?